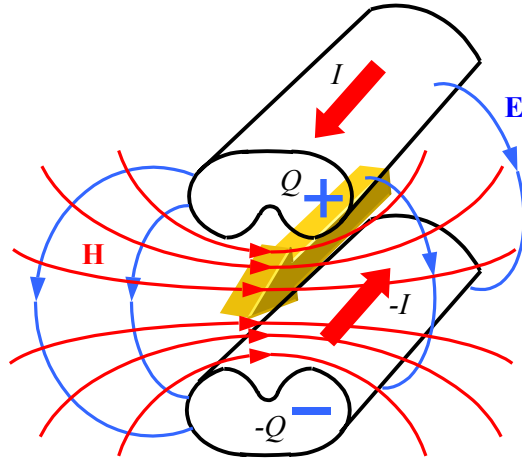


4 – Líneas de Transmisión 1

- *En este capítulo introducimos las nociones básicas de la propagación de ondas por líneas de transmisión.*
- *Las líneas de transmisión son estructuras de guiado de energía cuyas dimensiones, salvo una, son pequeñas frente a la longitud de onda de los campos electromagnéticos. Es posible considerar a la línea como una sucesión de cuadripolos de tamaño infinitesimal en cascada. Para cada cuadripolo entonces se puede aplicar la aproximación cuasi-estática. Esta descripción circuital se conoce como de parámetros distribuidos.*
- *En el caso de las líneas ideales no existen pérdidas de energía y el cuadripolo exhibe solamente elementos reactivos. Resultan ecuaciones de onda para tensión y corriente a lo largo de la línea, que queda definida por dos parámetros: la velocidad de propagación de las ondas y la impedancia característica, que da la relación entre las ondas de tensión y de corriente de una onda progresiva.*
- *En el caso de las líneas reales se incorporan las pérdidas en los conductores y en el dieléctrico. Esto lleva, en el caso de ondas armónicas, a una constante de propagación compleja – que indica la propagación con atenuación – y a una impedancia característica compleja. En la práctica son de interés las líneas de bajas pérdidas.*
- *Se presenta una descripción de líneas de uso común en la técnica, entre ellas las líneas de cinta o de par trenzado.*
- *Una línea cargada generalmente presenta reflexión de potencia, y en el caso ideal, ondas estacionarias.*
- *En general, modificando la impedancias de carga y la longitud de la línea es posible obtener cualquier impedancia de entrada, lo que permite usar a las líneas como elementos de circuito.*
- *Para líneas de transmisión de energía o información, la reflexión de potencia es habitualmente perjudicial, y está acompañada de sobretensiones y sobrecorrientes en la línea que pueden dañarla. El parámetro que define usualmente la importancia de la reflexión es la relación de onda estacionaria (ROE).*
- *Se presenta un coeficiente de reflexión generalizado que da la relación de la tensión de la onda regresiva y la tensión de la onda incidente en cualquier punto de la línea.*
- *En el Apéndice 5 se da una muy breve introducción al comportamiento de ondas en una dimensión.*

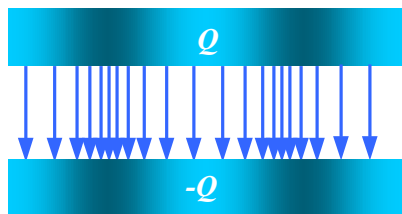
Guías de ondas y líneas de transmisión

Una **guía de ondas** es un dispositivo que se usa para transportar energía electromagnética y/o información de un sitio a otro. Generalmente se usa el término **línea de transmisión** a la guía de ondas usada en el extremo de menor frecuencia del espectro. **A estas frecuencias es posible utilizar un análisis cuasiestático.** Para



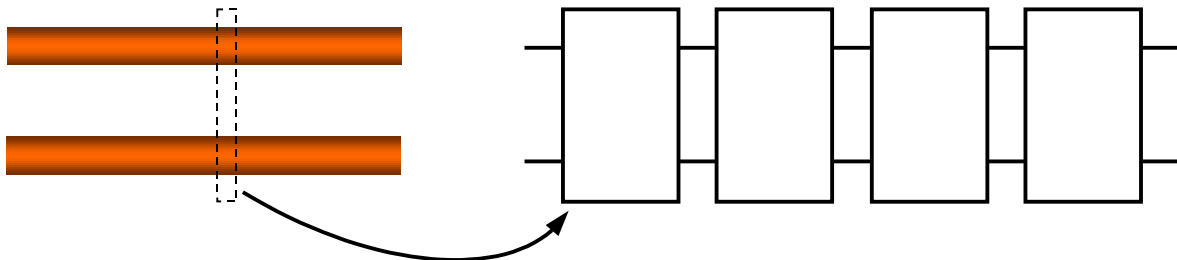
frecuencias más elevadas la aproximación cuasiestática deja de ser válida y se requiere un análisis en términos de campos, que es de mayor complejidad. Veremos este tratamiento en el capítulo de guías de ondas.

Podemos pensar a una línea de transmisión básica como un par de electrodos que se extienden paralelos por una longitud grande (en relación con la longitud de onda) en una dada dirección. El par de electrodos se hallan cargados con distribuciones de carga (variables a lo largo de la línea) iguales y opuestas, formando un capacitor distribuido. Al mismo



tiempo circulan corrientes opuestas (variables a lo largo de la línea) de igual magnitud, creando campo magnético que puede expresarse a través de una inductancia distribuida. La potencia fluye a lo largo de la línea. Los ejemplos más importantes de líneas de transmisión son el par bifilar, el coaxil y la microcinta.

Para usar un modelo cuasiestático se representa a la línea como una cascada de cuadripolos. Cada cuadripolo representa un tramo de línea de pequeña longitud frente a la mínima longitud de onda de la señal. Por lo tanto cada tramo se puede

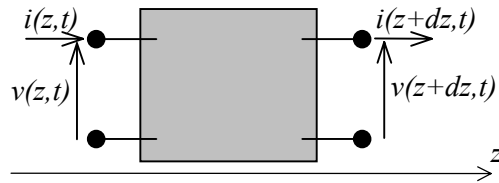


modelizar como un circuito usando la aproximación cuasiestática, como veremos en la siguiente sección.

Esta descripción corresponde a una línea **bifilar**. En muchas aplicaciones es necesario considerar líneas **multifilares**, como por ejemplo en circuitos impresos e integrados. Para el análisis circuital es necesario usar coeficientes de capacidad/inducción e inductancias parciales.

Modelo circuital de la línea bifilar ideal

En una línea de transmisión hay dimensiones, las transversales, que cumplen la condición cuasi-estática ($D \ll \lambda$), pero la otra dimensión (longitudinal) habitualmente no la cumple. Sin embargo, podemos ver a la línea como una sucesión o **cascada** de cuadripolos de longitud infinitesimal y para cada uno de ellos usar un modelo circuital, cuyos parámetros descriptivos son las tensiones y corrientes a la entrada y salida, ya que las dimensiones del cuadripolo satisfacen la condición cuasiestática. Elegimos la dirección del eje cartesiano z a lo largo de la línea. Cada tramo de longitud dz a lo largo de la dirección z puede asociarse a un cuadripolo, como se esquematiza en la figura.



Asumimos en esta sección que la línea no presenta pérdidas de energía (**línea ideal**). En tal caso los conductores de la línea serán perfectos ($\sigma \rightarrow \infty$) y el dieléctrico entre ellos tampoco tendrá pérdidas.

Las cargas y corrientes en los conductores crearán campos eléctricos y magnéticos cuya energía almacenada puede modelizarse por componentes reactivos puros: capacidad e inductancia. La capacidad está asociada al campo eléctrico creado por las cargas en los conductores de la línea y la inductancia al campo magnético generado por las corrientes que circulan por ella. Nos queda así el cuadripolo de la figura, donde Ldz es la inductancia del tramo y Cdz su capacidad.

Podemos aplicar ahora las leyes de Kirchhoff a este modelo cuasiestático. La primera ley, aplicada al nodo A lleva a:

$$i(z+dz) - i(z) + Cdz \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z = 0$$

donde el último término representa la corriente que sale de A por el capacitor. Pero,

$$\text{a primer orden: } i(z+dz) - i(z) \approx \left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z dz \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z \approx -C \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z$$

Análogamente, si aplicamos la segunda ley de Kirchhoff recorriendo la malla formada por el cuadripolo en sentido antihorario, tenemos: $v(z+dz) + Ldz \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z - v(z) \approx 0$

$$\text{de donde se obtiene, nuevamente a primer orden: } \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_z \approx -L \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z$$

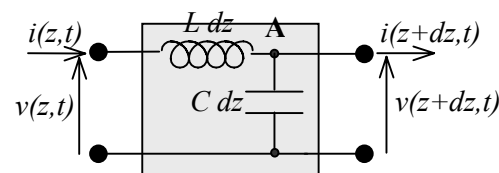
En resumen:

$$\left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z = -C \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_z \approx -L \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z$$

Estas dos ecuaciones diferenciales ligadas para la tensión y la corriente a la entrada del cuadripolo son las llamadas **ecuaciones del telegrafista** para la línea ideal.

Con el fin de analizar el significado de estas ecuaciones nos conviene desacoplar las ecuaciones diferenciales, para lo cual derivamos la primera respecto del tiempo y la

$$\text{segunda respecto de } z: \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z}$$



donde se ha sobreentendido que las cantidades se calculan en z . Pero las derivadas cruzadas son iguales, de manera que nos queda:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Esta ecuación diferencial para la tensión $v(z,t)$ se denomina **ecuación de ondas** o **ecuación de D'Alembert**. Es una ecuación diferencial lineal homogénea a derivadas parciales, cuya solución (**Apéndice 4**) es cualquier función del tipo:

$$v(z,t) = f(z \mp ct) \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esta función representa una onda que se propaga a lo largo del eje z con velocidad c , de comportamiento similar a las ondas en una cuerda vibrante.

Si se toma el signo (-) de la doble determinación, la onda se propaga en el sentido de $+z$ (onda progresiva), mientras que si se toma el signo (+) la propagación es según $-z$ (onda regresiva).

Se obtiene una ecuación idéntica para la corriente $i(z,t)$ a lo largo de la línea.

Se observa entonces que la solución a las ecuaciones del telegrafista en una línea ideal son ondas de tensión y corriente que se propagan a lo largo de la línea.

Además las ondas de tensión y corriente están vinculadas entre sí.

Consideremos una onda progresiva con: $v(z,t) = f(z - ct)$ y $i(z,t) = g(z - ct)$.

Entonces:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial g}{\partial u} \end{cases}$$

Luego: $\frac{\partial f}{\partial u} = L c \frac{\partial g}{\partial u}$ e integrando: $f(z - ct) = \sqrt{\frac{L}{C}} g(z - ct)$

de donde: $v(z,t) = Z_0 i(z,t)$ con $Z_0 = \sqrt{L/C}$

La cantidad Z_0 tiene dimensiones de impedancia y se llama **impedancia característica** de la línea. Junto con la **velocidad de propagación** de las ondas $c = 1/\sqrt{LC}$ son los parámetros fundamentales que describen el comportamiento de la línea como dispositivo transmisor de energía.

Si ahora tomamos el par de funciones correspondiente a una onda regresiva:

$v(z,t) = f(z + ct)$ y $i(z,t) = g(z + ct)$ es fácil demostrar que: $v(z,t) = -Z_0 i(z,t)$ de modo que en general:

$$v_{\pm}(z,t) = \pm Z_0 i_{\pm}(z,t) \quad \text{con} \quad Z_0 = \sqrt{L/C}$$

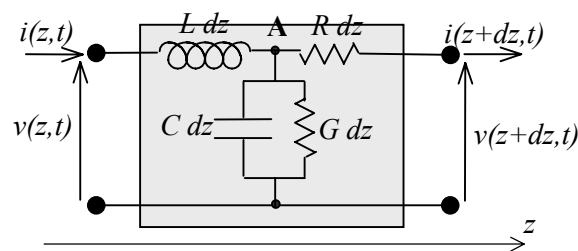
donde el signo + corresponde a la onda progresiva y el signo - a la regresiva.

Líneas con pérdidas

El modelo que hemos visto es un modelo ideal, es decir, sin pérdidas de energía. Sin embargo, todos los sistemas reales tienen pérdidas. En una línea de transmisión las pérdidas se dan por:

- pérdidas por efecto Joule en los conductores;
- pérdidas dieléctricas.

El modelo circuital de cuadripolo precedente puede incorporar estas pérdidas me-



diante una resistencia en serie, que modeliza las pérdidas por efecto Joule debidas a la circulación de corriente en los conductores de la línea y una conductancia en paralelo, que modeliza las pérdidas dieléctricas mediante una conductividad equivalente del material, como se ilustra en la figura.

Para obtener las ecuaciones del telegrafista para este modelo de la línea con pérdidas, aplicamos nuevamente la primera ley de Kirchhoff al nodo A:

$$i(z+dz) - i(z) = -G dz v(z) - C dz \frac{\partial v}{\partial t} \bigg|_z \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} \bigg|_z = -G v(z) - C \frac{\partial v}{\partial t} \bigg|_z$$

Recorriendo ahora la malla que forma el circuito, por la segunda ley de Kirchhoff:

$$v(z+dz) - v(z) = -R dz i(z) - L dz \frac{\partial i}{\partial t} \bigg|_z \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} \bigg|_z = -R i(z) - L \frac{\partial i}{\partial t} \bigg|_z$$

Las ecuaciones diferenciales acopladas son las nuevas **ecuaciones del telegrafista**. Para resolverlas nuevamente se desacoplan las ecuaciones a través de las derivadas cruzadas para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} \bigg|_z = -R i(z) - L \frac{\partial i}{\partial t} \bigg|_z &\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -R \frac{\partial i}{\partial z} - L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = R G v + R C \frac{\partial v}{\partial t} - L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \\ \frac{\partial i}{\partial z} \bigg|_z = -G v(z) - C \frac{\partial v}{\partial t} \bigg|_z &\Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -G \frac{\partial v}{\partial t} - C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= R G v + (R C + L G) \frac{\partial v}{\partial t} + L C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} &= R G i + (R C + L G) \frac{\partial i}{\partial t} + L C \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Estas son ecuaciones diferenciales de tipo ondulatorio. Quedan ecuaciones de onda de D'Alembert si consideramos pérdidas nulas ($R = G = 0$).

No existe solución general de estas ecuaciones como en el caso ideal. Sin embargo cualquier forma de onda físicamente realizable puede expresarse mediante una integral de Fourier¹ y la resolución es simple para **variaciones armónicas**:

$$v(z,t) = v_s(z) e^{i\omega t} \quad i(z,t) = i_s(z) e^{i\omega t}$$

en notación fasorial. Con esta elección la ecuación diferencial para la tensión queda:

$$\frac{d^2 v_s}{dz^2} = [R G + i\omega(R C + L G) - \omega^2 L C] v_s \Rightarrow \frac{d^2 v_s}{dz^2} + \gamma^2 v_s = 0$$

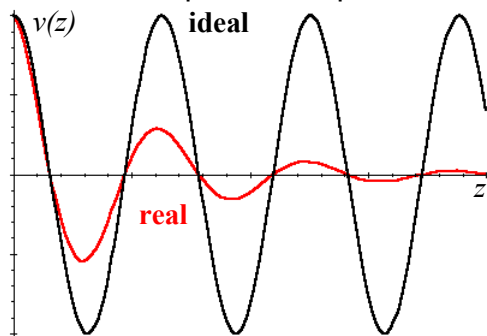
¹ Esto surge de que el cuadrado de cualquier onda de tensión y/o corriente, integrado en el tiempo es proporcional a la energía de la onda, que es acotada.

con: $\gamma = \sqrt{\omega^2 LC - RG - i\omega(RC + LG)}$

y se obtiene una ecuación similar para la corriente. Estas son ecuaciones llamadas **ecuaciones de Helmholtz**, donde el **número de onda** $\gamma = \beta - i\alpha$ es complejo, indicando una **propagación con atenuación**, causada por las pérdidas. Las ondas de tensión y corriente con número de onda complejo quedan:

$$v(z, t) = v_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad i(z, t) = i_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

donde se ve que las amplitudes decrecen a medida que la onda se propaga por la atenuación producida por las pérdidas. En la figura se observan dos ondas armónicas de igual frecuencia, una en una línea ideal y la otra en una línea real con $\alpha = \beta/5$. La velocidad de propagación de las ondas es la velocidad de propagación de los planos de fase constante o velocidad de fase:



$$\omega t - \beta z = cte. \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

En general, la relación entre ω y β es **no lineal** por la presencia de la raíz cuadrada. Esto lleva a que la velocidad de las ondas (la velocidad de fase, en rigor, como se verá en el Capítulo 6) dependa de la frecuencia, fenómeno conocido como **dispersión** de un paquete de ondas porque algunas componentes de Fourier viajan más rápido que otras.

Como $\gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \omega\sqrt{LC}\sqrt{(1 - iR/\omega L)(1 - iG/\omega C)}$

si $R/\omega L = G/\omega C \Rightarrow \gamma = \beta - i\alpha = \omega\sqrt{LC}(1 - iR/\omega L)$ y se ve que en este caso la relación entre ω y β es **lineal** por lo que no hay dispersión. Las líneas que cumplen esta condición son entonces **no dispersivas**.

Si definimos:

$$Z = R + i\omega L \quad (\text{impedancia serie por unidad de longitud})$$

$$Y = G + i\omega C \quad (\text{admitancia paralelo por unidad de longitud})$$

tenemos:

$$\gamma = \sqrt{-ZY}$$

Si vinculamos nuevamente las ondas de tensión y de corriente mediante las ecuaciones del telegrafista podemos obtener la expresión de la impedancia característica

de la línea con pérdidas:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} = Z'_0 + iZ''_0$$

La impedancia característica compleja indica que hay un **desfasaje temporal** entre la onda de tensión y la onda de corriente para el mismo z en la línea.

Análogamente podemos demostrar que para una onda regresiva:

$$v(z, t) = v_0 e^{i(\omega t + \beta z)} \quad i(z, t) = i_0 e^{i(\omega t + \beta z)} \Rightarrow v_0 = -Z_0 i_0$$

- La impedancia característica de una línea de transmisión es la impedancia (relación entre la tensión y la corriente) que se mediría en un plano de $z = cte.$ sobre la línea infinita para una onda progresiva.
- En general Z_0 es compleja, lo que señala un desfasaje entre las ondas de tensión y de corriente.

Líneas de bajas pérdidas

En los casos prácticos, las líneas se usan para transmitir energía por medio de ondas guiadas. Por lo tanto es esencial minimizar las pérdidas de propagación.

Hablamos de una línea de **bajas pérdidas** cuando:

$$R \ll \omega L \quad G \ll \omega C$$

lo que equivale a decir que la potencia de pérdidas es mucho menor que la potencia media almacenada en el campo electromagnético (que se propagará como una onda) en la línea.

Podemos aproximar las expresiones de γ y Z_0 en este caso:

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{-ZY} = \sqrt{-(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \sqrt{\omega^2 LC \left(1 - i\frac{R}{\omega L}\right) \left(1 - i\frac{G}{\omega C}\right)}$$

Si despreciamos el término de orden superior $RG/\omega^2 LC$ y luego desarrollamos en serie de Taylor para $i(R/\omega L + G/\omega C) \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\gamma = \beta - i\alpha \approx \omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - i\frac{R}{\omega L} - i\frac{G}{\omega C}} \approx \omega\sqrt{LC} \left[1 - \frac{i}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right)\right]$$

de donde:

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} \quad \alpha \approx \frac{\beta}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right) \ll \beta$$

En esta aproximación la velocidad de las ondas será:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y es la misma para cualquier frecuencia, de modo que para bajas pérdidas no hay dispersión.

Debido a la velocidad finita de propagación, existe un retardo de las señales al atravesar una línea. Este **retardo de propagación** se mide en s por m de línea y es la inversa de la velocidad en la línea: $\tau_p = 1/v_f = \sqrt{LC}$

β tiene unidad de rad/m, mientras que la unidad de α son neper/m. Suele usarse la unidad dB/m, donde: $\alpha(\text{dB/m}) = 20 \log_{10}(e) \alpha(\text{neper/m}) \approx 8.686 \alpha(\text{neper/m})^2$.

La impedancia característica es, con similares aproximaciones:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1 - iR/\omega L}{1 - iG/\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\left(1 - i\frac{R}{\omega L}\right) \left(1 + i\frac{G}{\omega C}\right)} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 + \frac{i}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right)\right]$$

de donde:

$$Z_0 = Z'_0 + iZ''_0 \quad \text{con:} \quad Z'_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \quad Z''_0 \approx \frac{Z'_0}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right) \ll Z'_0$$

Ejemplo 69: Calcular las constantes de propagación y de atenuación, la velocidad de fase y la impedancia característica a $f = 10 \text{ MHz}$ de una línea con los siguientes parámetros:

- $L = 1.2 \mu\text{Hy/m}$, $C = 30 \text{ pF/m}$,
- $L = 1.2 \mu\text{Hy/m}$, $C = 30 \text{ pF/m}$, $R = 0.1 \Omega/\text{m}$,
- $L = 1.2 \mu\text{Hy/m}$, $C = 30 \text{ pF/m}$, $R = 0.1 \Omega/\text{m}$, $G = 10^{-6} 1/\Omega\text{m}$.

En el caso a) se trata de una línea ideal:

$$\gamma = \beta = \omega\sqrt{LC} \approx 0.377 \text{ m}^{-1} \quad v_f = 1/\sqrt{LC} \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.55 c \quad Z_0 = \sqrt{L/C} = 200 \Omega$$

En el caso b) hay pérdidas en los conductores, pero: $R = 0.1 \Omega/\text{m} \ll \omega L \approx 75.4 \Omega/\text{m}$ de

² Ver pág.231.

modo que es una línea de bajas pérdidas, y tenemos:

$$\beta \approx \omega \sqrt{LC} \approx 0.377 \text{ m}^{-1} \quad \alpha \approx \frac{R\beta}{2\omega L} \approx 0.00025 \text{ m}^{-1} \quad v_f \approx 1/\sqrt{LC} \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.55 c$$

$$Z'_0 \approx \sqrt{L/C} = 200 \Omega \quad Z''_0 \approx -\frac{RZ'_0}{2\omega L} \approx 0.13 \Omega$$

En el caso c) hay pérdidas conductoras y dieléctricas. Usamos las fórmulas generales:

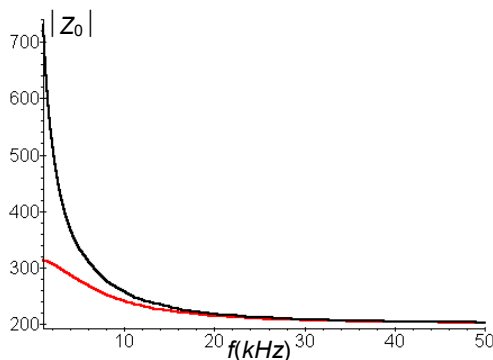
$$Z = R + i\omega L \quad Y = G + i\omega C$$

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{-ZY} \approx (0.377 - i 3.5 \times 10^{-4}) \text{ m}^{-1} \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{\beta} \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.56 c$$

$$Z_0 = \sqrt{Z/Y} \approx (200 - i 0.08) \Omega$$

Se observa que las pérdidas en b) y c) no introducen diferencias significativas en los valores de los parámetros fundamentales de la línea respecto del caso ideal.

Ejemplo 70: Graficar la variación del módulo de la impedancia característica en función de la frecuencia para la línea c) del Ejemplo previo.



El módulo de la impedancia característica es:

$$|Z_0| = \left| \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} \right|$$

En el caso b) no hay pérdidas dieléctricas, de modo que la impedancia queda indefinida para $\omega \rightarrow 0$. Para $\omega \rightarrow \infty$, $Z_0 \rightarrow \sqrt{L/C} = 200 \Omega$. En la gráfica de la izquierda se presenta en negro la variación de $|Z_0|$ con la frecuencia. En el caso

c), para $\omega \rightarrow 0$ $Z_0 \rightarrow \sqrt{R/G} \approx 316 \Omega$. La gráfica

es el trazo en rojo. En alta frecuencia el valor es el mismo que en el caso b). En ambos casos $|Z_0|$ decrece hacia el valor de alta frecuencia.

En estos ejemplos se pone en evidencia la fuerte dependencia del valor y el comportamiento de los parámetros de una línea con la frecuencia.

Potencia

Las ondas electromagnéticas transportan energía, que puede describirse mediante el vector de Poynting: $N(z, t) = E(z, t) \times H(z, t)$. Dado que los campos pueden relacionarse con las ondas de tensión y corriente en la línea, es más sencillo derivar el transporte de energía usando el cuadripolo del modelo circuital de la línea. Podemos hallar un análogo del teorema de Poynting a partir de las ecuaciones del telegrafista:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -Gv - C \frac{\partial v}{\partial t} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Multiplicamos la primera ecuación por v y la segunda por i y sumamos miembro a miembro para obtener:

$$v \frac{\partial i}{\partial z} = -Gv^2 - \frac{C}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t}, \quad i \frac{\partial v}{\partial z} = -Ri^2 - \frac{L}{2} \frac{\partial i^2}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(vi) = -(Gv^2 + Ri^2) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} C v^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right)$$

de donde se ve que el flujo de potencia vi se convierte en potencia disipada en los **elementos activos** G y R o se almacena en los **elementos reactivos** L y C .

Al igual que en el caso de los campos, podemos calcular la potencia media transportada por la onda utilizando la notación fasorial:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(vi^*)$$

Para una onda progresiva armónica en una línea sin pérdidas:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(vi^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(v_0 e^{i(\omega t - kz)} i_0^* e^{-i(\omega t - kz)}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(v_0 \frac{v_0^*}{Z_0^*}\right) = \frac{|v_0|^2 Z_0'}{2|v_0|^2}$$

En el caso de una línea **con pérdidas** la potencia va decayendo por la atenuación a medida que se propaga:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(vi^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(v_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} i_0^* e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - \beta z)}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(v_0 \frac{v_0^*}{Z_0^*}\right) e^{-2\alpha z} = \frac{|v_0|^2 Z_0'}{2|v_0|^2} e^{-2\alpha z}$$

De aquí se observa que la relación entre la potencia que fluye en z y en $(z+lm)$ es:

$$\frac{\langle vi \rangle|_z}{\langle vi \rangle|_{z+1}} = \frac{e^{-2\alpha z}}{e^{-2\alpha(z+1)}} = e^{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\langle vi \rangle|_z}{\langle vi \rangle|_{z+1}} \right)$$

La relación de potencias se puede expresar:

$$10 \log_{10} \left(\frac{\langle vi \rangle|_z}{\langle vi \rangle|_{z+1}} \right) = 10 \log_{10} (e^{2\alpha}) = 20 \log_{10} (e) \alpha$$

de donde surge la expresión de la atenuación en decibels por metro.

Ejemplo 71: Calcular la potencia activa que viaja por las líneas del **Ejemplo 69** si se propaga una onda progresiva con $v_0 = 10V$.

Tenemos, en general: $\langle vi \rangle = \frac{|v_0|^2 Z_0'}{2|Z_0|^2}$ Entonces:

a) $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2}{2Z_0} \approx 0.25W$ b) $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2 Z_0'}{2|Z_0|^2} \approx 0.25W$ c) $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2 Z_0'}{2|Z_0|^2} \approx 0.447W$

Parámetros circuitales de líneas básicas comunes

El uso del modelo cuasi-estático de cuadripolo para cada tramo dz de la línea permite calcular, como en la situación estática, los parámetros circuitales del modelo. Para muy altas frecuencias el modelo cuasi-estático deja de ser válido y se debe usar el modelo de campos de las guías de onda. Para frecuencias no tan altas se puede usar el modelo cuasi-estático pero se debe tener en cuenta, por ejemplo, la distribución no homogénea de corriente en los conductores para el cálculo de las pérdidas por efecto Joule.

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las líneas de uso común. ϵ , μ son los parámetros del material dieléctrico, $\sigma_{eq} = \omega\epsilon''$ es la conductividad equivalente del dieléctrico (que está asociada a las pérdidas dieléctricas), $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ρ es la resistividad de baja frecuencia de los conductores (supuestos del mismo material) y $R_s = \sqrt{\omega\mu/2\sigma}$ es la resistencia superficial de los conductores a alta frecuencia. Este parámetro surge del efecto pelicular de distribución no homogénea de corriente en un conductor a alta frecuencia, que hemos visto superficialmente en el **Ejemplo 67** y trataremos en más detalle en el Capítulo de propagación de ondas en medios materiales. A baja frecuencias suponemos que la distribución de corriente es uniforme en la sección de los conductores. La inductancia por unidad de longitud es la inductan-

cia externa solamente. Las fórmulas de la capacidad e inductancia por unidad de longitud son las cuasi-estáticas y se han hallado en los **Ejemplos 20, 21, 48 y 49**. La impedancia característica a baja frecuencia se debe calcular con la fórmula general para no introducir errores (ver el **Ejemplo 70**).

	Coaxil	Bifilar	Doble cinta
$C \text{ (F/m)}$	$\frac{2 \pi \epsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi \epsilon}{\ln(d/a)}$	$\frac{\epsilon b}{a}$
$L \text{ (Hy/m)}$	$\frac{\mu}{2 \pi} \ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi} \ln(d/a)$	$\frac{\mu a}{b}$
$G \text{ (}\Omega \text{ m)}^{-1}$	$\frac{2 \pi \sigma_{eq}}{\ln(b/a)}$	$\frac{2 \pi \sigma_{eq}}{\ln(d/a)}$	$\frac{\sigma_{eq} b}{a}$
Alta frecuencia	$R \text{ (}\Omega \text{ / m)}$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2 R_s}{b}$
	$Z_0 \text{ (}\Omega \text{)}$	$\frac{\eta}{\pi} \ln(d/a)$	$\frac{\eta a}{b}$
Baja frecuencia	$R \text{ (}\Omega \text{ / m)}$	$\frac{\rho}{\pi} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2bt} \right)$	$\frac{2 \rho}{bt}$
	$Z_0 \text{ (}\Omega \text{)}$	$\sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$	

Ejemplo 72: De acuerdo a tablas, el cable coaxil RG59 tiene un radio de la malla de 3.1 mm , impedancia característica $Z_0 = 75 \Omega$ y las ondas se propagan con velocidad $v = 0.66 c$. A 100 MHz la atenuación es 11.5 dB cada 100 m . Hallar la permitividad del dieléctrico, el radio del conductor interior, la inductancia, la capacidad y la resistencia por unidad de longitud.

Como la velocidad de propagación en la línea es: $v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = c/\sqrt{\epsilon_r}$

ya que $\mu \approx \mu_0$, tenemos: $\epsilon_r = 1/(v/c)^2 \approx 2.3$

Además, a alta frecuencia: $Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 2\pi\sqrt{\epsilon_r} \frac{Z_0}{\eta_0} \approx 1.895$

y como $b = 3.1 \text{ mm}$ $\ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx 1.895 \Rightarrow a \approx 0.46 \text{ mm}$

Con estos valores podemos calcular:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \approx 38 \mu\text{Hy} / \text{m} \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \approx 67 \text{ pF} / \text{m}$$

La atenuación, suponiendo únicamente pérdidas conductoras o resistivas, es:

$$\alpha \approx \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z_0} \Rightarrow R = 2\alpha Z_0$$

Pasamos α de dB/m a neper/m : $\alpha(\text{neper/m}) \approx \alpha(\text{dB/m})/8.686 \approx 13.2 \times 10^{-3} \text{ neper/m}$

y entonces: $R = 2\alpha Z_0 \approx 2 \Omega / \text{m}$

Ejemplo 73: Calcular la impedancia característica a alta frecuencia de las siguientes líneas:

- Bifilar con dieléctrico de aire. $d = 1 \text{ cm}$, $a = 0.6 \text{ mm}$.
- Idem b) pero con dieléctrico de polietileno ($\epsilon_r = 2.2$).
- Doble cinta con dieléctrico de aire. $a = 5 \text{ mm}$, $b = 3 \text{ cm}$.
- Idem c) pero con dieléctrico de poliestireno ($\epsilon_r = 2.7$).

Usamos las expresiones de la tabla anterior:

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\pi} \ln(d/a) \approx 337.4 \Omega$$

$$\text{b) } Z_0 = \frac{\eta_0}{\pi} \ln(d/a) = \frac{\eta_0}{\pi \sqrt{\epsilon_r}} \ln(d/a) \approx 227.5 \Omega$$

$$Z_0 = \frac{\eta_0 a}{b} \approx 2260.4 \Omega$$

$$\text{d) } Z_0 = \frac{\eta_0 a}{b} = \frac{\eta_0 a}{b \sqrt{\epsilon_3}} \approx 1375.6 \Omega$$

La siguiente tabla presenta información sobre varios tipos de cables coaxiales³ de uso común en la electrónica:

Tipo	Diámetro exterior	Z_0	v_f/c	Peso cada 100m	C	f(MHz) / Atenuación en dB cada 100 m									
	mm	ohm		kg	pF/m	10	14	28	50	100	144	435	1296	2300	
Aircom Plus	10,8	50	0,80	15,0	84	0,9				3,3	4,5	8,2	14,5	21,5	
H2000 Flex®	10,3	50	0,83	14,0	80	1,1	1,4	2	2,7	3,9	4,8	8,5	15,7	21,8	
H 100	9,8	50	0,84	11,0	79			2	2,8		4,9	8,8	16	22,4	
H 500	9,8	50	0,81	13,5	82	1,3			2,9	4,1	5,6	9,3	16,8	24,1	
RG 213 US100	10,3	50	0,66	15,5	101			2,4	3,2		5,9	10,1	21,1		
RG 213 U	10,3	50	0,66	15,5	101	2,2		3,1	4,4	6,2	7,9	14,8	27,5	41	
Aircell 7	7,3	50	0,83	7,2	74		3,4	3,7	4,8	6,6	7,9	14,1	26,1	37,9	
H 155	5,4	50	0,79	3,9	100			4,9	6,5	9,4	11,2	19,8	34,9	50	
RG 58 CU	5,0	50	0,66	4,0	101	4,6	6,2	8	11	15,6	17,8	33,2	64,5	110	
RG 55	5,4	53	0,66	6,0	94						16	29	52		
RG 62 A/U	6,2	93	0,85	1,73	40			5,0				22,0			
RG 223	5,4	50	0,66	6,0	101		6,1	7,9	11	15,4	17,6	30	57	85	
RG 174	2,6	50	0,66	1,1	101	13		18		30	34	60	110	175	
RG 142	4,95	50	0,635								15	28	49	72	
H 43	9,8	75	0,85	9,1	52	1,2			2,5	3,7		8	14,8		
RG 11	10,3	75	0,66	13,9	67				4,6	6,9		17,5			
RG 59	6,15	75	0,66	5,7	67					11,5	15	25	49	72	
CX 5S	6,8	75	0,8	4,0	55				5,1		12		24		
3 S 60	6,0	60	0,66	4,9	85					10					

³ Datos tomados de <http://www.xs4all.nl/~hanvu/coaxkabel.html>.

Líneas de cinta

Las líneas de cinta se utilizan mucho en aplicaciones electrónicas. Se las usa por su facilidad de construcción en circuitos integrados y para crear componentes de circuitos como filtros, acopladores, resonadores, antenas y otros. Hay diversas variantes de las líneas de cinta, de las que las más usadas son la línea de cinta propiamente dicha (stripline) y la línea de microcinta (microstrip).

Stripline

Las striplines están formadas por dos cintas conductoras paralelas de tierra, y una cinta conductora interna de señal entre ellas. El ancho w de la cinta de señal es pequeño frente al ancho de las cintas de tierra, de manera que éstas pueden considerarse planos infinitos. El espesor de la cinta de señal es t y la separación entre las cintas de tierra, llena con un dieléctrico de permitividad ϵ , es b . Hay fórmulas aproximadas en la literatura para calcular la impedancia característica de una línea stripline.

Sea $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} \approx \eta_0 / \sqrt{\epsilon_r} \approx 120\pi / \sqrt{\epsilon_r} \text{ } (\Omega)$. La fórmula que da mayor precisión cuando puede despreciarse el espesor t de la cinta de señal es: $Z_{01} \approx \frac{\eta}{4} \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})}$ donde

$k = 1 / \cosh\left(\frac{\pi w}{2b}\right)$ y $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$ es la integral elíptica completa de primera

especie. Para $w/b > 0.56$ esta expresión se aproxima como: $Z_{02} \approx \frac{\pi\eta}{8} \frac{1}{\ln(2e^{\pi w/2b})}$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea se obtienen de las expresiones: $v = c/\sqrt{\epsilon_r}$ y $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$ donde c es la velocidad de la luz y λ_0 la longitud de onda en el vacío.

La atenuación debida a las pérdidas óhmicas en los conductores es aproximadamente (en dB/m):

$$\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{\eta b} \left[\frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] \quad (\text{para } w > 2b \text{ y } t < b/10)$$

donde $R_s = \sqrt{\omega \mu / 2 \sigma}$, mientras que la atenuación debida a las pérdidas dieléctricas es (también en dB/m):

$$\alpha_D \approx 8.686 \eta \sigma_{eq}$$

donde $\sigma_{eq} = \omega \epsilon''$ es la conductividad equivalente del dieléctrico.

Ejemplo 74: Hallar la impedancia característica, la velocidad de propagación, la longitud de onda y los factores de atenuación a 100 MHz de una línea stripline de parámetros: $b = 1 \text{ mm}$, $w = 2 \text{ mm}$, $t = 10 \mu\text{m}$, $\epsilon_r = 2.5$, $\sigma = 6 \times 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$.

$$\begin{aligned} \eta &\approx 120\pi / \sqrt{\epsilon_r} \approx 238.43 \Omega \\ k &= 1 / \cosh\left(\frac{\pi w}{2b}\right) \approx 0.086 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} Z_{01} \approx \frac{\eta}{4} \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})} \approx 24.417 \Omega \\ Z_{02} \approx \frac{\pi\eta}{8} \frac{1}{\ln(2e^{\pi w/2b})} \approx 24.417 \Omega \end{cases}$$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea son:

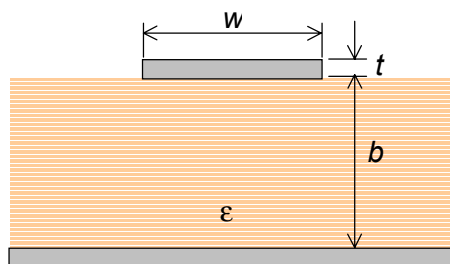
$$v = c/\sqrt{\epsilon_r} \approx 0.63 c \approx 1.9 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r} = v/f \approx 1.9 \text{ m}$$

El factor de atenuación por pérdidas conductoras es:

$$\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{\eta b} \left[\frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] = \frac{8.686}{b} \sqrt{\frac{\omega \epsilon}{2\sigma}} \left[\frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] \approx 0.33 \text{ dB/m}$$

Microstrip

A diferencia de la stripline, las líneas microstrip son estructuras abiertas, de forma que las líneas de campo no están confinadas y la propagación debe analizarse en rigor con las técnicas de campos de las guías de onda. Sin embargo, a bajas fre-



cuencias es posible un análisis cuasi-estático con parámetros distribuidos como el que realizamos en este capítulo. Hay diversas variantes constructivas de estas líneas, y a modo de ejemplo presentamos la configuración clásica de la figura. Una cinta conductora muy ancha funciona como plano de tierra y sobre ella se coloca un sustrato dieléctrico de permitividad ϵ y espesor b . Sobre el sustrato hay una

cinta de señal de espesor t y ancho w .

La impedancia característica de la línea es de difícil cálculo debido al campo disperso fuera de la región entre los conductores. Las expresiones más conocidas son las halladas por Wheeler⁴. A partir de ellas se han realizado aproximaciones y mejoras para diversas situaciones. En esta sección solamente presentamos las fórmulas más sencillas⁵ en las que se desprecia el espesor t de la cinta de señal.

Sea $\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12b/w}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{b} \right)^2 \right]$ Entonces:

- Si $w/b \leq 1 \Rightarrow Z_0 \approx \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_{eff}}} \ln \left(\frac{8b}{w} + \frac{w}{4b} \right)$
- Si $w/b \geq 1 \Rightarrow Z_0 \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{1}{w/b + 1.393 + 0.667 \ln(w/b + 1.444)}$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea se obtienen de las expresiones: $v = c/\sqrt{\epsilon_{eff}}$ y $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_{eff}}$ donde c es la velocidad de la luz y λ_0 la longitud de onda en el vacío.

Las atenuaciones debidas a las pérdidas óhmicas en los conductores y ndieléctricas son (en dB/m): $\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{wZ_0}$ $\alpha_d \approx 27.3 \frac{(\epsilon_{eff} - 1)\epsilon_r \tan \theta}{(\epsilon_r - 1)\epsilon_{eff} \lambda}$

donde $\lambda = v/f$ es la longitud de onda en la línea y $\tan \theta = \sigma/\omega\epsilon$ es la tangente de pérdidas del sustrato. La constante de atenuación total es la suma de $\alpha_c + \alpha_d$.

Otras ecuaciones de interés son las de **diseño** de líneas microstrip: dado el material del sustrato y la impedancia característica deseada, determinar w/b :

- $w/b \leq 2 \Rightarrow \frac{w}{b} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2}$ con $A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} (0.23 + 0.11/\epsilon_r)$
 - $w/b \geq 2 \Rightarrow \frac{w}{b} = \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} [\ln(B - 1) + 0.39 - 0.61/\epsilon_r] \right\}$
- con $B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}}$

⁴ H.A. Wheeler, "Transmission-Line Properties of Parallel Strips Separated by a Dielectric Sheet", IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, MTT-3, No.3, marzo 1965, pp. 172-185.

⁵ Tomadas de I.J.Bahl, D.K.Trivedi, "A Designer's Guide to Microstrip Line", Microwaves, Mayo 1977, p.174. Fórmulas más complejas, para mayores anchos de banda y situaciones de geometrías variadas, pueden encontrarse en el documento RT 3.1.2 de la firma Rogers Corp. (<http://www.rogers-corp.com/mwu/litintbl.htm>).

Ejemplo 75: Hallar la impedancia característica, la velocidad de propagación, la longitud de onda y los factores de atenuación a 100 MHz de una línea microstrip de parámetros: $b = 1\text{ mm}$, $w = 2\text{ mm}$, $t = 10\mu\text{m}$, $\epsilon_r = 2.5$, $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$.

La permitividad efectiva es: $\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12b/w}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{b} \right)^2 \right] \approx 2.06$

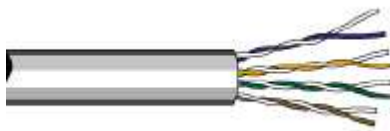
Como $w = 2b$: $Z_0 \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{1}{\frac{w}{b} + 1.393 + 0.667 \ln \left(\frac{w}{b} + 1.444 \right)} \approx 62.2 \Omega$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea son:

$$v = c / \sqrt{\epsilon_{eff}} \approx 0.7 c \approx 2.09 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r} = v / f \approx 2.09 \text{ m}$$

La atenuación por pérdidas óhmicas es: $\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{w Z_0} = \frac{8.686}{w Z_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \approx 0.18 \text{ dB/m}$

Líneas de par trenzado



Una línea de par trenzado consiste en cables formados por hilos de cobre recubiertos de plata y rodeados por un aislador. Los cables se trenzan de a pares para disminuir la interferencia, y cada par forma un circuito que puede transmitir datos. La línea consiste en un

grupo de uno o más pares. Esta línea se conoce como **UTP (unshielded twisted pair)** y es el tipo más común de línea usada en redes de computadoras. Para mayor rechazo a interferencia (en particular el rechazo a modo común y la diafonía entre líneas) se rodean los pares con un aislador. Esta línea se conoce como **STP (shielded twisted pair)**. Tanto UTPs como STPs se usan en instrumentación electrónica, aviones y otras aplicaciones críticas de transmisión de datos.

De acuerdo a las características y calidad constructivas las líneas de par trenzado la **ANSI/EIA (American National Standards Institute/Electronic Industries Association)** las clasifica en las siguientes categorías:

Categoría	Máxima velocidad de datos	Aplicación usual
CAT 1	Hasta 1 Mbps	Voz analógica (telefonía tradicional) Portero eléctrico
CAT 2	Hasta 4 Mbps	Sistema de cableado de IBM para redes Token Ring
CAT 3	Hasta 16 Mbps	Transmisión de voz y datos sobre Ethernet 10BASE-T Es el tipo de cable más común en instalaciones corporativas antiguas y contiene cuatro pares de cables
CAT 4	Hasta 20 Mbps	Solamente en Token Ring de 16 Mbps. Cuatro pares de cables
CAT 5	Hasta 100 Mbps	Transmisión de voz y datos sobre Ethernet 10BASE-T, 100BASE-T4 y 100BASE-TX. Es el tipo de cable más común en instalaciones nuevas y contiene cuatro pares de cables Está en proceso de testeo para la especificación Gigabit Ethernet para distancias cortas (para distancias largas debe usarse fibra óptica).

Las características de una línea de par trenzado no son fáciles de determinar. Sin embargo, debido a su popularidad se han hecho estudios semi-empíricos para determinarlas⁶, donde se modeliza cada par como una doble hélice. Sea un UTP con:

- D : separación entre los conductores del par
 d : diámetro de cada conductor del par
 T : número de vueltas por unidad de longitud
 l : longitud de la línea
 ϵ_r : permitividad relativa del dieléctrico entre pares
 σ_1 : conductividad del alma de cobre de cada hilo
 σ_2 : conductividad del recubrimiento de plata de cada hilo
 $\tan(\delta)$: tangente de pérdidas del dieléctrico entre pares

Con estos datos se pueden determinar parámetros geométricos:

$$\vartheta = \tan^{-1}(T \pi D) \quad \text{ángulo de giro de la hélice}$$

$$l_0 = T l \pi D / \sin \vartheta \quad \text{longitud real de cable}$$

$$q = 0.45 + 10^{-3} \vartheta^2 \quad \text{factor de forma para el cálculo de la permitividad efectiva } (\vartheta \text{ en rads})$$

que permiten calcular los parámetros físicos para la línea ideal:

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_0 [1 + q(\epsilon_r - 1)] \quad \text{permitividad equivalente o efectiva}$$

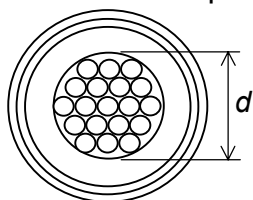
$$C = \frac{\pi \epsilon_{eff}}{\cosh^{-1}(D/d)} \quad \text{capacidad por unidad de longitud}$$

$$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}(D/d) \quad \text{inductancia por unidad de longitud}$$

$$v = c / \sqrt{\epsilon_{eff} / \epsilon_0} \quad \text{velocidad de propagación de las ondas}$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \frac{\cosh^{-1}(D/d)}{\pi} \sqrt{\mu / \epsilon_{eff}} \quad \text{impedancia característica}$$

Para determinar los parámetros ligados con las pérdidas se requiere considerar que cada cable del par está formado por hilos separados (ver figura), y que hay una redistribución de la corriente en cada hilo debido al “efecto de proximidad” de los hilos y el comportamiento del conductor a alta frecuencia, que veremos en el siguiente capítulo.



A baja frecuencia la resistencia por unidad de longitud que presenta cada cable del par es:

$$R_{cc} = f_P N f_S \frac{2}{\pi (d^2/4) \sigma_2}$$

donde $f_P = 1.15$ es el factor de proximidad, N es el número de hilos en el cable (19 en el ejemplo), $f_S = 1/25$ es el factor de relación entre la superficie del cable (que aparece en el denominador) y la superficie de cada hilo y σ_2 es la conductividad del recubrimiento del hilo.

A alta frecuencia se debe tener en cuenta que los campos (y las líneas de corriente) se distribuyen fundamentalmente por la periferia del hilo conductor, debido al llamado efecto pelicular que veremos en el próximo capítulo. Con esta corrección se tiene:

$$R = R_{cc} \frac{d}{4} \sqrt{\pi f \mu \sigma_2}$$

La conductancia por unidad de longitud es:

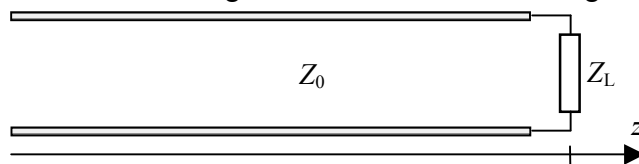
$$G = 2 \pi \tan(\delta) C$$

⁶ P. Lefferson, “Twisted Magnet Wire Transmission Lines”, IEEE Trans. Parts, Hybrids and Pack. PHP-7, No.4, diciembre 1971, pp. 148-154.

J.H. Broxon II y D.K. Linhart, “Twisted-Wire Transmission Lines”, RF Design, junio 1990, pp. 73-75.

Línea cargada – Coeficientes de reflexión y transmisión

La línea se utiliza para transportar energía desde un generador a una carga. En esta sección veremos qué pasa cuando una línea de impedancia característica Z_0 se conecta a una carga Z_L , como se ve en la figura.



La solución general de la ecuación de ondas en la línea será la superposición de una onda progresiva y una regresiva:

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + V_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

$$i(z, t) = I_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + I_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

(obsérvese que se coloca el cero de z en la posición de la carga).

Pero sabemos que: $V_+ = Z_0 I_+$ y $V_- = -Z_0 I_-$.

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + V_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

Entonces:

$$i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - \gamma z)} - \frac{V_-}{Z_0} e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

La carga impone la condición: $\left. \frac{v(z, t)}{i(z, t)} \right|_{z=0} = Z_L$, de manera que:

$$v(0, t) = (V_+ + V_-) e^{i\omega t} = Z_L i(0, t) = \frac{Z_L}{Z_0} (V_+ - V_-) e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{(V_+ + V_-)}{(V_+ - V_-)} = \frac{Z_L}{Z_0}$$

de esta ecuación se obtiene la relación entre las amplitudes de las ondas de tensión progresiva y regresiva:

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Esta relación se conoce como coeficiente de reflexión sobre la carga o **coeficiente de reflexión**⁷ a secas. En general podemos pensar en una onda que viaja hacia la carga y que se ve parcialmente “reflejada” en ella. Se observa que $\rho_L = 0$ si $Z_L = Z_0$. En este caso no existe onda regresiva (no existe reflexión). La carga está “**adaptada**” a la línea, y esto ocurre cuando la impedancia de carga es igual a la impedancia característica de la línea. La tensión sobre la carga será:

$$V_L = V_+ + V_- = (1 + \rho_L) V_+ \Rightarrow \tau_L = \frac{V_L}{V_+} = 1 + \rho_L = \frac{2 Z_L}{Z_L + Z_0}$$

τ_L es el llamado coeficiente de transmisión sobre la carga o **coeficiente de transmisión** a secas, y relaciona la tensión sobre la carga con la tensión de la onda incidente, también medida sobre la carga.

Analizamos ahora la **propagación de la energía** en la línea. Consideramos Z_0 real por simplicidad matemática. Usamos la expresión del valor medio de un producto de fasores del **Apéndice 3**:

$$\text{Potencia incidente: } \langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(v_+ i_+^*) = \frac{|v_+|^2}{2 Z_0} = \frac{|V_+|^2}{2 Z_0}$$

$$\text{Potencia reflejada: } \langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(v_- i_-^*) = \frac{|v_-|^2}{2 Z_0} = \frac{|V_-|^2}{2 Z_0} = \frac{|\rho_L V_+|^2}{2 Z_0} = |\rho_L|^2 \langle P_i \rangle$$

⁷ En alguna literatura técnica el coeficiente de reflexión se denota con el símbolo Γ .

$$\begin{aligned} \text{Potencia transmitida: } \langle P_t \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L I_L^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(V_L \frac{V_L^*}{Z_L^*}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_L) \left|\frac{V_L}{Z_L}\right|^2 \\ &= \frac{R_L}{2|Z_L|^2} |\tau_L V_+|^2 = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2 \langle P_i \rangle \end{aligned}$$

donde R_L es la resistencia de carga (parte real de la impedancia de carga). Estas relaciones nos permiten definir los coeficientes de transmisión y reflexión de potencia:

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho_L|^2 \quad T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2$$

Ondas estacionarias

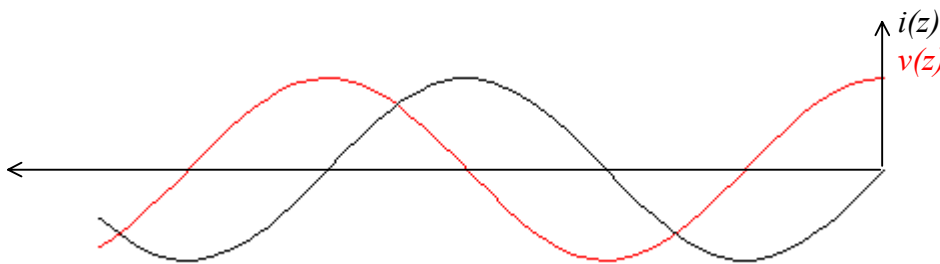
Si la línea **ideal** está abierta o cortocircuitada en el extremo de carga se producen ondas estacionarias. El coeficiente de reflexión vale:

$$Z_L = \infty \Rightarrow \rho_L = 1 \quad Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1$$

y la onda de tensión sobre la línea será:

$$\begin{aligned} v(z, t) &= V_+ e^{i(\omega t - kz)} + V_- e^{i(\omega t + kz)} = V_+ e^{i(\omega t - kz)} + \rho_L V_+ e^{i(\omega t + kz)} \\ Z_L = \infty &\Rightarrow \begin{cases} v(z, t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2V_+ e^{i\omega t} \cos(kz) \\ i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = -2i \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \sin(kz) \end{cases} \\ Z_L = 0 &\Rightarrow \begin{cases} v(z, t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = 2iV_+ e^{i\omega t} \sin(kz) \\ i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2 \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \cos(kz) \end{cases} \end{aligned}$$

que son **ondas estacionarias** ya que la onda deja de presentar la forma ondulatoria $f(\omega t \pm kz)$ y aparecen puntos (**nodos**) donde la magnitud (tensión o corriente) es siempre cero. En el caso de la línea abierta, los nodos de las ondas estacionarias se dan para $\cos(kz_n) = 0 \Rightarrow z_n = (2n+1)\pi/2$. En el caso de la línea cortocircuitada los nodos están en: $\sin(kz_m) = 0 \Rightarrow z_m = m\pi$



La gráfica muestra las ondas de tensión y corriente para $t = 0$ con carga abierta.

En general podemos decir que $|\rho_L| \leq 1$

Se observa que:

- para una **línea adaptada** $R = 0$ y $T = 1$.
- en el caso de **ondas estacionarias**, $R = 1$ y $T = 0$.

Es común expresar la reflexión de potencia, que da idea de la adaptación entre línea en carga en decibeles (dB). Se define así la **pérdida de retorno (return loss)** como:

$$RL = -10 \log(R) = -20 \log(|\rho_L|)$$

donde $\log$ representa el logaritmo en base 10

Ejemplo 76: Calcular los coeficientes de reflexión y transmisión y los coeficientes de reflexión y transmisión de potencia para las líneas del **Ejemplo 69** a) y b), cuando se coloca una carga consistente en una serie RL con $R = 100 \Omega$ y $L = 10 \mu\text{Hy}$ a 1 MHz .

La impedancia de carga es $Z_L = R + i\omega L \approx (100 + i62.8) \Omega$

a) Línea ideal (sin pérdidas), $Z_0 = 200 \Omega$:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \approx \frac{(100 + i62.8) \Omega - 200 \Omega}{(100 + i62.8) \Omega + 200 \Omega} \approx -0.2773 + i0.2675 \quad \tau_L = 1 + \rho \approx 0.7227 + i0.2675$$

$$R = |\rho_L|^2 \approx 0.14846 \quad T = 1 - R \approx 0.85154$$

b) Línea con pérdidas, $Z_0 \approx (200 + i0.13) \Omega$:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \approx -0.2773 + i0.2672 \quad \tau_L = 1 + \rho \approx 0.7227 + i0.2672$$

$$R = |\rho_L|^2 \approx 0.14826 \quad T = 1 - R \approx 0.85174$$

Como se ve, hay muy pocas diferencias porque en b) las pérdidas son bajas.

Impedancia y admitancia de onda. Impedancia de entrada. ROE

En general, la tensión y la corriente en un punto cualquiera de la línea son:

$$v(z, t) = e^{i\omega t} [V_+ e^{-i\gamma z} + V_- e^{i\gamma z}] = V_+ e^{i\omega t} [e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}]$$

$$i(z, t) = e^{i\omega t} \left[\frac{V_+}{Z_0} e^{-i\gamma z} - \frac{V_-}{Z_0} e^{i\gamma z} \right] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} [e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}]$$

de modo que podemos definir punto a punto una **impedancia de onda** como el cociente entre la tensión y la corriente:

$$Z(z) = \frac{v(z, t)}{i(z, t)} = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}}$$

que podemos escribir en función de Z_L y Z_0 :

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L (e^{-i\gamma z} + e^{i\gamma z}) + Z_0 (e^{-i\gamma z} - e^{i\gamma z})}{Z_L (e^{-i\gamma z} - e^{i\gamma z}) + Z_0 (e^{-i\gamma z} + e^{i\gamma z})}$$

y finalmente:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \sin(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \sin(\gamma z)}$$

Como se ve, la impedancia de onda varía a lo largo de la línea y en general adopta valores complejos.

Por ejemplo, analicemos los casos de terminación más simples:

- | | | | |
|--------------------------|----------------|---------------|--------------------------------|
| a) línea adaptada | $Z_L = Z_0$ | $\Rightarrow$ | $Z(z) = Z_0$ |
| b) línea cortocircuitada | $Z_L = 0$ | $\Rightarrow$ | $Z(z) = -i Z_0 \tan(\gamma z)$ |
| c) línea abierta | $Z_L = \infty$ | $\Rightarrow$ | $Z(z) = -i Z_0 \cot(\gamma z)$ |

Se observa que si la línea no tiene pérdidas (Z_0 y γ reales), la impedancia de onda resulta imaginaria pura.

En algunas circunstancias, especialmente cuando se trabaja con conexiones en paralelo, es conveniente trabajar con admitancias. Por ejemplo, es fácil demostrar que:

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \Rightarrow \quad \rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L}$$

y la impedancia de onda puede escribirse:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \sin(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \sin(\gamma z)} = \frac{1}{Y_0} \frac{\frac{1}{Y_L} \cos(\gamma z) - i \frac{1}{Y_0} \sin(\gamma z)}{\frac{1}{Y_0} \cos(\gamma z) - i \frac{1}{Y_L} \sin(\gamma z)} = \frac{1}{Y_0} \frac{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \sin(\gamma z)}{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \sin(\gamma z)}$$

de donde:

$$Y(z) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \sin(\gamma z)}{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \sin(\gamma z)}$$

es la admitancia de onda en la línea.

Si la línea tiene una longitud d , la impedancia que se ve a la entrada es la **impedancia de entrada** de la línea:

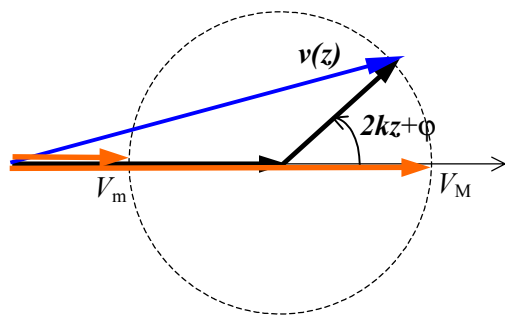
$$Z_{in} = Z(-d) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma d) + i Z_0 \sin(\gamma d)}{Z_0 \cos(\gamma d) + i Z_L \sin(\gamma d)}$$

y la **admitancia de entrada**:

$$Y_{in} = Y(-d) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma d) + i Y_0 \sin(\gamma d)}{Y_0 \cos(\gamma d) + i Y_L \sin(\gamma d)}$$

Por otra parte, vemos que la tensión a lo largo de la línea **ideal** se puede escribir:

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - k z)} [1 + \rho_L e^{i 2 k z}] = V_+ [1 + |\rho_L| e^{i(2 k z + \varphi)}] e^{i(\omega t - k z)}$$



que puede interpretarse como una onda progresiva de tensión cuya amplitud depende de z como:

$$V_+ [1 + |\rho_L| e^{i(2 k z + \varphi)}]$$

Podemos interpretar esta amplitud como la suma de dos fasores: uno constante de valor 1 y otro de valor variable con z , de manera que la suma se puede representar gráficamente como en la figura. Se observa que el fador suma tendrá un máximo V_M y un mínimo V_m cuando el

fador móvil se halle en fase o en contrafase, respectivamente, del fador fijo.

$$2 k z_M + \varphi = 2 n \pi \quad \Rightarrow \quad V_M = V_+ (1 + |\rho_L|)$$

Estos valores son:

$$2 k z_m + \varphi = (2 n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad V_m = V_+ (1 - |\rho_L|)$$

Definimos la **relación de onda estacionaria (ROE)**⁸ como la relación entre el máximo valor y el mínimo valor de tensión sobre la línea:

$$ROE = \frac{V_M}{V_m} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

- En el caso de una onda puramente viajera, $\rho_L = 0 \Rightarrow ROE = 1$
- En el caso de una onda estacionaria pura, $|\rho_L| = 1 \Rightarrow ROE \rightarrow \infty$
- Como en general: $|\rho_L| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq ROE < \infty$

El coeficiente de reflexión y la ROE son parámetros relacionados con la existencia de reflexión de energía en la interfase línea-carga. En muchas situaciones no es conveniente tener reflexión, por lo que la medición y control de estos parámetros es una tarea de mantenimiento de importancia.

⁸ En literatura inglesa **VSWR** (Voltage Standing Wave Ratio).

Ejemplo 77: Calcular la impedancia de entrada y la ROE para la línea cargada del **Ejemplo 69 b)**, si la línea tiene una longitud de $3m$.

La línea tiene las propiedades (tomadas del **Ejemplo 69**):

$$\gamma = \beta + i\alpha \approx (0.377 + i0.00025)m^{-1} \quad Z'_0 = Z'_0 + iZ''_0 \approx (200 + i0.13)\Omega$$

En el **Ejemplo 76** habíamos calculado el coeficiente de reflexión: $\rho \approx -0.277 + i0.267$

de donde: $ROE = (1 + |\rho_L|) / (1 - |\rho_L|) \approx 2.25$

$$y: \quad Z_{in} = Z(-d) = Z_0 \frac{Z_L \cos(kd) + iZ_0 \sin(kd)}{Z_0 \cos(kd) + iZ_L \sin(kd)} \approx (445.19 + i45.77)\Omega$$

Ejemplo 78: Calcular la impedancia de entrada de líneas ideales cortocircuitadas o abiertas en el extremo de carga.

En la pág.239 se hallaron las ondas de tensión y corriente en líneas cortocircuitadas y abiertas:

$$\begin{aligned} Z_L = 0 &\Rightarrow \begin{cases} v(z,t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = 2iV_+ e^{i\omega t} \sin(kz) \\ i(z,t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2\frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \cos(kz) \end{cases} \\ Z_L = \infty &\Rightarrow \begin{cases} v(z,t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2V_+ e^{i\omega t} \cos(kz) \\ i(z,t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = -2i\frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \sin(kz) \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la impedancia de entrada es ($z = -d$):

$$Z_L = 0 \Rightarrow Z_{in} = \frac{v(-d,t)}{i(-d,t)} = -iZ_0 \tan(kd) \quad Z_L = \infty \Rightarrow Z_{in} = \frac{v(-d,t)}{i(-d,t)} = -iZ_0 \cotan(kd)$$

Se ve que la impedancia de entrada es puramente reactiva para líneas ideales. Para ciertos puntos (que corresponden a los nodos de la onda de tensión y a los antinodos de la onda de corriente) la impedancia es nula, mientras que para otros (nodos de corriente y antinodos de tensión) la impedancia es infinita. Para posiciones intermedias la impedancia recorre todos los valores intermedios.

Se puede simular de esta manera inductores y capacitores con líneas, lo que en ciertas circunstancias es más conveniente que usar los elementos concentrados normales.

Ejemplo 79: Se pueden determinar los parámetros fundamentales (la impedancia característica Z_0 y el número de onda k) de una línea a partir de la medición de la impedancia de entrada para un tramo de longitud d , en condiciones de circuito abierto $Z_{in\,ca}$ y de cortocircuito $Z_{in\,cc}$. Para una línea de $3m$ de longitud se mide $Z_{in\,ca} = (60.53 + i55.97)\Omega$ y $Z_{in\,cc} = (72.25 + i53.45)\Omega$. Hallar Z_0 y k .

$$\text{La impedancia de entrada de la línea es: } Z_{in} = Z(-d) = Z_0 \frac{Z_L \cos(kd) + iZ_0 \sin(kd)}{Z_0 \cos(kd) + iZ_L \sin(kd)}$$

$$\text{En circuito abierto: } Z_L \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{in\,ca} = -iZ_0 \cotan(kd)$$

$$\text{En cortocircuito: } Z_L = 0 \Rightarrow Z_{in\,cc} = iZ_0 \tan(kd)$$

$$\text{Luego, multiplicando miembro a miembro: } Z_{in\,ca} Z_{in\,cc} = Z_0^2 \Rightarrow Z_0 = \sqrt{Z_{in\,ca} Z_{in\,cc}}$$

$$\text{Y dividiendo miembro a miembro: } \frac{Z_{in\,cc}}{Z_{in\,ca}} = -\tan^2(kd) \Rightarrow k = \frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\pm \sqrt{-\frac{Z_{in\,cc}}{Z_{in\,ca}}} \right)$$

$$\text{La impedancia característica resulta: } Z_0 = \sqrt{Z_{in\,ca} Z_{in\,cc}} \approx (66.3 + i54.9)\Omega$$

El problema de la última expresión es que la función arcotangente de argumento complejo es multivaluada, de forma que $\tan(\alpha + n\pi) = \tan(\alpha)$ para n entero. Entonces:

$$k = \frac{1}{d} \left[\tan^{-1} \left(\pm \sqrt{-\frac{Z_{in\ cc}}{Z_{in\ ca}}} \right) + n\pi \right]$$

Por ejemplo:

$\pm$	N	$k \text{ (m}^{-1}\text{)}$	$\pm$	n	$k \text{ (m}^{-1}\text{)}$	$\pm$	n	$k \text{ (m}^{-1}\text{)}$	$\pm$	n	$k \text{ (m}^{-1}\text{)}$
+	0	$0.37 + i 0.56$	+	-1	$-0.67 + i 0.56$	-	1	$0.67 - i 0.56$	-	1	$0.67 - i 0.56$
-	0	$-0.37 - i 0.56$	+	1	$1.42 + i 0.56$	-	-1	$-1.42 - i 0.56$	-	-1	$-1.42 - i 0.56$

Como $k = \beta - i \alpha$ la parte real debe ser positiva y la parte imaginaria negativa, para que el valor de k calculado sea posible. Se observa que el primer valor que cumple esta propiedad se da para la determinación negativa del doble signo y $n = 1$.

Valores máximo y mínimo de tensión y corriente sobre una línea

Para propósitos de diseño muchas veces es necesario saber cuáles son los valores máximos de tensión y corriente sobre la línea, de manera de no superar los valores admitidos por la construcción de la línea.

La onda de tensión en una línea **ideal** cargada puede escribirse, como hemos visto en la sección precedente: $v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - k z)} [1 + \rho_L e^{i 2 k z}] = V_+ [1 + |\rho_L| e^{i(2 k z + \varphi)}] e^{i(\omega t - k z)}$

y la onda de corriente: $i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - k z)} [1 - \rho_L e^{i 2 k z}] = \frac{V_+}{Z_0} [1 - |\rho_L| e^{i(2 k z + \varphi)}] e^{i(\omega t - k z)}$

Los extremos de tensión/corriente en la línea tienen las propiedades:

Tensión	Posición	Valor
Máximo	$z_{V_M} = \frac{2n\pi - \varphi}{2k}$	$V_M = V_+ (1 + \rho_L)$
Mínimo	$z_{V_m} = \frac{(2n+1)\pi - \varphi}{2k}$	$V_m = V_+ (1 - \rho_L)$
Corriente	Posición	Valor
Máximo	$z_{I_M} = \frac{(2n+1)\pi - \varphi}{2k}$	$I_M = \frac{V_+}{Z_0} (1 + \rho_L)$
Mínimo	$z_{I_m} = \frac{2n\pi - \varphi}{2k}$	$I_m = \frac{V_+}{Z_0} (1 - \rho_L)$

En la posición en que se da el máximo de tensión se da el mínimo de corriente y viceversa. En estos extremos el fasor $e^{i(2kz + \varphi)}$ pasa por valores reales. La impedancia de onda en estos extremos es:

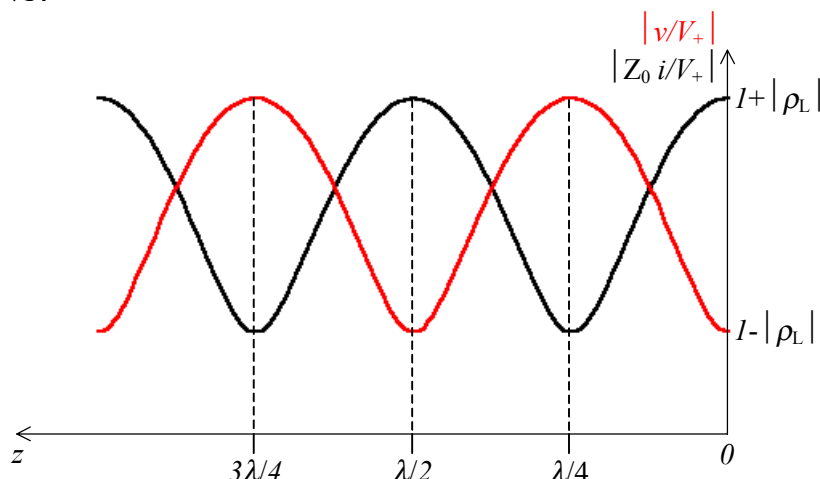
$$\text{Máximo de tensión: } \begin{cases} V_M = V_+ (1 + |\rho_L|) \\ I_M = \frac{V_+}{Z_0} (1 - |\rho_L|) \end{cases} \Rightarrow Z_M = Z_0 \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = Z_0 \text{ ROE}$$

$$\text{Mínimo de tensión: } \begin{cases} V_m = V_+ (1 - |\rho_L|) \\ I_m = \frac{V_+}{Z_0} (1 + |\rho_L|) \end{cases} \Rightarrow Z_m = Z_0 \frac{1 - |\rho_L|}{1 + |\rho_L|} = \frac{Z_0}{\text{ROE}}$$

y la impedancia de onda adopta todos los valores entre estos dos extremos a lo largo de la línea.

En la siguiente figura se muestra el módulo de la tensión y la corriente a lo largo de la línea, que conforman ondas cuasi-estacionarias. Obsérvese que estos módulos no dependen del tiempo. Las distribuciones se acercan a una onda estacionaria pura

cuando $|\rho_L| \rightarrow 1$.



Ejemplo 80: Por una línea de $Z_0 = 300 \Omega$, y $v_f = c/3$, con una carga $Z_L = (100 + i 15) \Omega$ viaja una onda de tensión pico $V_+ = 10 V$ y frecuencia $10 MHz$. Hallar los valores de los máximos de tensión, corriente y de impedancia a lo largo de la línea.

El coeficiente de reflexión es: $\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \approx -0.49 + i 0.056 \Rightarrow |\rho_L| \approx 0.5$

Los extremos de tensión son:
 $V_M = V_+ (1 + |\rho_L|) \approx 15 V$
 $V_m = V_+ (1 - |\rho_L|) \approx 5 V$

Se ve que el máximo de la onda de tensión es un 50 % mayor que la tensión pico de la onda incidente.

los extremos de corriente:
 $I_M = V_M / Z_0 \approx 0.05 A = 50 mA$
 $I_m = V_m / Z_0 \approx 0.017 A = 17 mA$

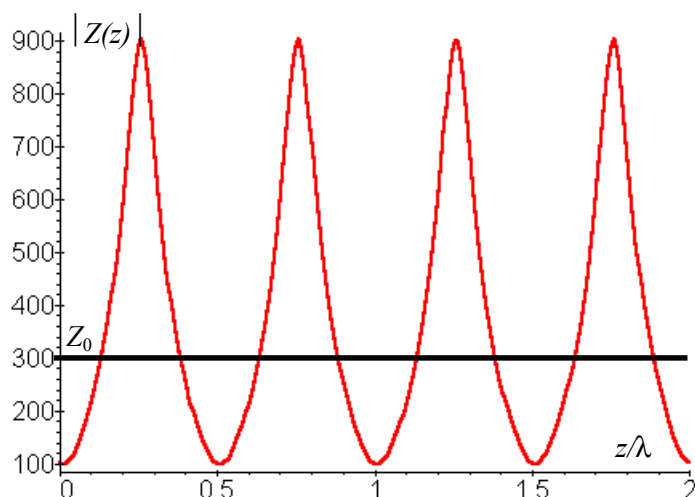
Para comparación calculamos la corriente sobre la carga:

$$i_L = \frac{v_L}{Z_L} = \frac{\tau_L v_+}{Z_L} = \frac{(1 + \rho_L) v_+}{Z_L} \Rightarrow I_L = \left| \frac{1 + \rho_L}{Z_L} \right| V_+ \approx 49.96 mA$$

de donde se observa que la corriente pico es similar a la corriente de carga.

y las impedancias extremas:
 $Z_M = V_M / I_m \approx 902.53 \Omega$
 $Z_m = V_m / I_M \approx 99.72 \Omega$

también: $ROE = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = 3 \Rightarrow \begin{cases} Z_M = Z_0 ROE = 900 \Omega \\ Z_m = Z_0 / ROE = 100 \Omega \end{cases}$



Si graficamos la impedancia de onda a lo largo de la línea:

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{i2kz}}{1 - \rho_L e^{i2kz}}$$

con $k = \frac{\omega}{v_f} = \frac{2\pi f}{v_f} \approx 0.628 \text{ rad/m}$

obtenemos la figura de la izquierda donde se observa la variación periódica del módulo de la impedancia de onda, entre los valores mínimo y máximo hallados.

Coeficiente de reflexión generalizado

En las secciones precedentes hemos usado el coeficiente de reflexión definido como la relación entre la tensión reflejada y la tensión incidente, medidas sobre la carga ($z = 0$). Podemos generalizar esta expresión definiendo un coeficiente de reflexión generalizado como la relación entre la onda de tensión reflejada y la incidente, medidas sobre cualquier punto de la línea:

$$\rho(z) = \frac{V_- e^{i\gamma z}}{V_+ e^{-i\gamma z}} = \rho_L e^{i2\gamma z}$$

A partir de este coeficiente podemos expresar otros resultados como:

$$\begin{aligned} Z(z) &= Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}} = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{i2\gamma z}}{1 - \rho_L e^{i2\gamma z}} \Rightarrow Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \\ v(z, t) &= V_+ e^{i(\omega t - k z)} [1 + \rho_L e^{i2k z}] \Rightarrow v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - k z)} [1 + \rho(z)] \\ i(z, t) &= \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - k z)} [1 - \rho_L e^{i2k z}] \Rightarrow i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - k z)} [1 - \rho(z)] \end{aligned}$$

APENDICE 5 – Ondas elementales 1D

Sea una función $f(z, t)$ que cumple la ecuación unidimensional de D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Vamos a utilizar las nuevas variables: $u = z - ct$ $v = z + ct$.

Entonces, calculando la derivada de una función de función:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{porque} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad \text{porque} \quad -\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = c \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) c \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de D'Alembert se convierte en:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{1}{c^2} c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

Integramos sobre v : $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = C_1(u)$

El resultado de la integración es una constante (respecto de v), que en general es entonces una función de u . Si integramos de nuevo:

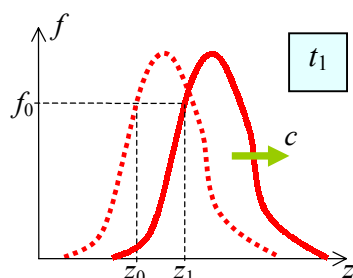
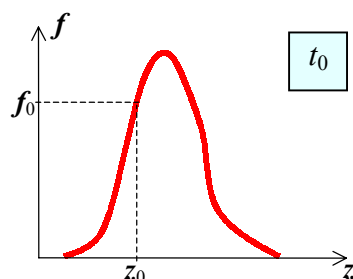
$$\frac{\partial f}{\partial u} = C_1(u) \Rightarrow f(u, v) = \int C_1(u) du + f_2(v) = f_1(u) + f_2(v) = f_1(z - ct) + f_2(z + ct)$$

la nueva "constante" de integración depende sólo de v y finalmente queda demostrado que la solución es una superposición de una función de u y una función de v .

Luego:

$$f(z, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(z, t) = f(z \mp ct)$$

Analicemos el comportamiento de la solución $f(z, t) = f(z - ct)$



Como f es una función de dos variables para los gráficos es conveniente tomar “fotos” a t constante. Por ejemplo, para $t = t_0$ se tiene la figura de la izquierda.

Para $z = z_0$ la función vale $f(z_0, t_0) = f_0$.

Si ahora tomamos un instante posterior $t_1 > t_0$, existirá una posición z_1 para la cual se vuelve a tener el mismo valor de la función f_0 . Esto ocurre cuando coinciden los argumentos: $f(z_0, t_0) = f(z_1, t_1) \Rightarrow z_0 - ct_0 = z_1 - ct_1$ de donde: $z_1 = z_0 + c(t_1 - t_0) \Rightarrow z_1 > z_0$.

Este razonamiento se puede hacer para cada posición original z_0 , de manera que se observa que cada punto de la curva original se desplaza a la derecha una cantidad uniforme $c(t_1 - t_0)$.

Esto es equivalente a decir que la función misma se desplaza hacia la derecha con velocidad constante c . Una magnitud física cuya función representativa se “traslada” se denomina

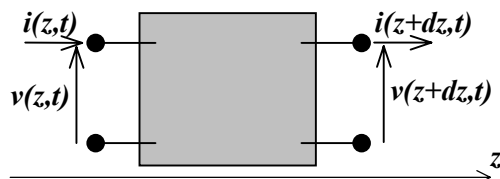
una **onda**.

En el caso de la solución $f(z, t) = f(z + ct) = f[z - (-c)t]$ se ve fácilmente que el comportamiento es el mismo que el descrito, pero con una velocidad $(-c)$. Por lo tanto esta solución implica una onda que se propaga en el sentido decreciente de z .

Convencionalmente se denomina onda **progresiva** a la que se propaga en el sentido elegido como positivo o de crecimiento de las posiciones y **regresiva** a la que se propaga en el sentido opuesto.

RESUMEN

- Las **líneas de transmisión** son **guías de onda** donde se puede aplicar la **aproximación cuasi-estática de parámetros distribuidos**.



Se modelizan como **cuadripolos** en cascada de extensión infinitesimal. Las variables significativas son la tensión y corriente a lo largo de la línea.

- Las líneas **ideales** no tienen pérdidas de energía y el cuadripolo exhibe solamente elementos reactivos. Resultan las **ecuaciones del telegrafista** para tensión y corriente a lo largo de la línea:

$$\left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z = -C \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_z \approx -L \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

que llevan a las ecuaciones de onda:

Estas ecuaciones tienen **soluciones ondulatorias**:

$$v(z,t) = f(z \mp ct) \quad i(z,t) = v(z,t) / Z_0 \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z_0 = \sqrt{L/C}$$

donde c es la **velocidad de propagación** de las ondas y Z_0 la **impedancia característica** de la línea.

- En el caso de las líneas **reales** se incorporan las **pérdidas** en los conductores y en el dieléctrico. Esto lleva a ecuaciones de propagación más complicadas:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} - RGv = 0 \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} - RGi = 0$$

En el caso de **ondas armónicas** es fácil resolver las ecuaciones de ondas. Se obtiene una constante de propagación **compleja** – que indica la propagación con atenuación – y una impedancia característica compleja:

$$Z = R + i\omega L \quad Y = G + i\omega C \Rightarrow \gamma = \beta + i\alpha = \sqrt{-ZY} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{Z/Y}$$

La velocidad de propagación de la onda es la **velocidad de fase**:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Esta velocidad depende generalmente de la frecuencia, lo que produce el **fenómeno de la dispersión**, que implica la distorsión de pulsos o paquetes de onda que se propaguen por la línea.

En la práctica son de interés las líneas de bajas pérdidas: $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$

donde:

$$\beta \equiv \omega \sqrt{LC} \quad , \quad \alpha \approx \frac{\beta}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \ll \beta \quad \text{y se tiene:}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z_0 = Z'_0 + iZ''_0 \quad \text{con:} \quad Z'_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{C}} \quad , \quad Z''_0 \approx \frac{Z'_0}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \ll Z'_0$$

La potencia que viaja por la línea es:

$$\langle v i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(v i^*)$$

Cuando hay pérdidas la potencia va decreciendo a medida de que se propaga. Se tiene en db/m:

$$10 \log_{10} \left(\frac{|\langle v_i \rangle|_z}{|\langle v_i \rangle|_{z+1}} \right) = 10 \log_{10} (e^{2\alpha}) = 20 \log_{10} (e) \alpha$$

- Una línea **cargada** generalmente presenta **reflexión** de ondas. La relación entre las amplitudes de las ondas de tensión reflejada y la transmitida a la carga con la incidente son los coeficientes de **reflexión** y **transmisión**:

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L} \quad \tau_L = \frac{V_L}{V_+} = 1 + \rho_L = \frac{2 Z_L}{Z_L + Z_0}$$

y los coeficientes de reflexión y transmisión de **potencia**:

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho_L|^2 \quad T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2$$

La reflexión de potencia se expresa normalmente en db mediante el coeficiente de **pérdida de retorno**:

$$RL = -10 \log(R) = -20 \log(|\rho_L|)$$

- La relación entre tensión y corriente en cualquier punto del circuito es la **impedancia de onda** o **impedancia de campo**:

$$Z(z) = \frac{v(z,t)}{i(z,t)} = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \sin(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \sin(\gamma z)}$$

y también la **admitancia de onda** o **admitancia de campo**:

$$Y(z) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \sin(\gamma z)}{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \sin(\gamma z)}$$

- Para líneas de transmisión de energía o información, la reflexión de potencia es habitualmente perjudicial, y está acompañada de sobretensiones y sobrecorrientes en la línea que pueden dañarla. El parámetro que define usualmente la importancia de la reflexión es la **relación de onda estacionaria**:

$$ROE = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

que es la relación entre los valores máximo $V_M = V_+(1 + |\rho_L|)$ y mínimo $V_m = V_+(1 - |\rho_L|)$ de tensión a lo largo de la línea. Los correspondientes valores máximo y mínimo de corriente son: $I_M = \frac{V_+}{Z_0}(1 + |\rho_L|)$ y $I_m = \frac{V_+}{Z_0}(1 - |\rho_L|)$.

- Definimos el **coeficiente de reflexión generalizado**, dependiente de la posición como:

$$\rho(z) = \frac{V_- e^{i\gamma z}}{V_+ e^{-i\gamma z}} = \rho_L e^{i2\gamma z}$$

PROBLEMAS

- 4.1) Una línea coaxil ideal con conductores de radios $a = 0.5 \text{ mm}$, $b = 0.5 \text{ cm}$ y dieléctrico de $\epsilon_r = 4$ lleva una onda de corriente progresiva de amplitud $I_0 = 0.1 \text{ A}$ y frecuencia 10 MHz . Si la línea está terminada en su impedancia característica, calcular: a) la impedancia característica, b) la velocidad de propagación de las ondas, c) la onda de tensión en cada punto de la línea, d) los campos eléctrico y magnético, e) el valor medio del vector de Poynting y la potencia media transportada por la onda y f) recalculer la potencia media del punto e) a partir de la corriente y la tensión.

[Rta: 69.03Ω , $1.5 \times 10^8 \text{ m/seg}$]

- 4.2) Se carga una línea ideal de impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$ con una impedancia $Z_L = (100 + i100) \Omega$. Calcular ρ en módulo y fase y la relación de onda estacionaria.

[Rta: $0.62 e^{i0.52}$, 4.26]

- 4.3) Una línea con $R = 0.1 \Omega/\text{m}$, $G = 0$, $C = 3 \text{ pF/m}$ y $(L/C)^{1/2} = 300 \Omega$ tiene a su entrada una tensión $V_0 = 10 e^{i\omega t} \text{ V}$, $f = 100 \text{ MHz}$. Si la longitud de la línea es 30 m y $Z_L = 100 \Omega$, 300Ω y $(0.4 + i0.5) (L/C)^{1/2}$, hallar la potencia media transmitida en los tres casos.

[Rta: 0.06 W , 0.168 W , 0.054 W]

- 4.4) La relación de onda estacionaria en una línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω terminada en una impedancia de carga desconocida es 3.0 . La distancia entre dos mínimos consecutivos del voltaje es 20 cm y el primer mínimo se encuentra a 5 cm de la carga. Determine a) el coeficiente de reflexión y b) la impedancia de carga Z_L .

- 4.5) Una línea de transmisión sin pérdidas de longitud 0.434λ y cuya impedancia característica es de 100Ω está terminada con una impedancia de $(260 + i180) \Omega$. Calcule a) el coeficiente de reflexión, b) la ROE, c) la impedancia de entrada y d) la posición del máximo de voltaje más cercano a la carga.

[Rta: $\rho = 0.6/21.6^\circ$, $S = 4$, $Z_i = (69 + i120) \Omega$, a 0.03λ de la carga]

- 4.6) Considere una línea ideal de impedancia Z_0 y longitud L abierta en los extremos y excitada en forma que la tensión en el centro de la línea es $V(0, t) = V_0 e^{i\omega t}$. a) Calcular las ondas de tensión y corriente en todo punto de la línea. b) Si $L = 3 \text{ m}$ y la velocidad de las ondas en la línea es de $2.7 \times 10^8 \text{ m/s}$, ¿cuáles son las frecuencias permitidas de excitación?

[Rta: $f_n = 90 \text{ n MHz}$; $n = 1, 2, 3, \dots$]

- 4.7) Una línea ideal de $Z_0 = 50 \Omega$, $v_f = c$ y $L = 10 \text{ m}$ está excitada senoidalmente con una frecuencia de 10 MHz y conectada a una carga resistiva $Z_L = 10 \Omega$. a) Hallar la relación de onda estacionaria. b) Calcular el desfase entre tensión y corriente a la entrada de la línea. c) Diseñar un tramo de línea de adaptación (cuarto de onda) sabiendo que en esta $v_f = 0.8 c$. ¿Cuál es la impedancia que ve el generador?.

[Rta: $-64^\circ 18'$, 22.3Ω con 6 m]

- 4.8) Una línea de microcinta tiene un dieléctrico de cuarzo fundido ($\epsilon_r = 3.8$). Calcular ϵ_{eff} , Z_0 y λ a 10 GHz , para: a) $w/h = 4.5$ y b) $w/h = 1.1$.

[Rta: a) $\epsilon_{eff} = 3.18$, $Z_0 = 29.92 \Omega$, $\lambda = 16.8 \text{ mm}$, b) $\epsilon_{eff} = 2.69$, $Z_0 = 73.93 \Omega$, $\lambda = 18.28 \text{ mm}$]

- 4.9) A 10 GHz una línea de microcinta tiene los siguientes parámetros: $h = 0.8 \text{ mm}$, $w = 1 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 6.6$, $\tan \theta = 10^{-4}$ y $\sigma_c = 5.8 \times 10^7 (\Omega m)^{-1}$. Calcule la atenuación por pérdidas conductoras y por pérdidas dieléctricas.

[Rta: $\alpha_c = 4.2 \text{ dB/m}$, $\alpha_d = 0.177 \text{ dB/m}$]

- 4.10) Se desea construir una línea de microcinta de 20Ω sobre zafiro ($\epsilon_r = 10$). Calcule el valor requerido de w/h , la permitividad relativa efectiva y la velocidad de las ondas en la línea.